ĐINH VĂN GẮNG

BÀI TẬP XÁC SUẤT VÀ THỐNG KÊ

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

ĐINH VĂN GẮNG

BÀI TẬP XÁC SUẤT VÀ THỐNG KÊ

(Tái bản lần thứ mười một)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

LỜI NÓI ĐẦU

Cuốn **BÀI TẬP XÁC SUẤT VÀ THỐNG KÊ** *được biên soạn tiếp theo cuốn* **Lí thuyết xác suất và thống kê** *(Nhà xuất bản Giáo dục - 1999) nhằm giúp sinh viên trong việc tự học.*

Về cơ bản, thứ tự các chương mục ở cuốn sách này giống như cuốn lí thuyết. Ở mỗi mục, hay chương khi không phân ra các mục nhỏ, đều có phần tóm tắt lí thuyết, các ví dụ và sau đó là các bài tập.

*Các bài tập mẫu dưới dạng ví dụ được giải chi tiết có những ghi chú thêm khi cần thiết. Các bài tập phần lớn được hướng dẫn giải, còn một số có chỉ dẫn hay đáp số. Để rèn luyện kĩ năng giải toán các bạn sinh viên nên cố gắng tự giải, khi thật cần hãy tham khảo phần trả lời để kiểm tra. Các bạn nên chú ý đến các lập luận trong lời giải ở các bài tập có dấu *.*

Chúng tôi xin cảm ơn Tiến sĩ Vũ Thế Hựu đã góp ý kiến đóng góp để bản thảo được tốt hơn, cảm ơn Nhà xuất bản Giáo dục đã tạo điều kiện để cuốn sách sớm tới tay bạn đọc.

Xin được trân trọng cảm ơn và mong bạn đọc xa gần góp ý bổ sung cho tài liệu được hoàn thiện.

TP. Hồ Chí Minh, tháng 4 năm 1999

TÁC GIẢ

CHƯƠNG I

KHÔNG GIAN XÁC SUẤT

§1. ĐẠI SỐ CÁC BIẾN CỐ NGẪU NHIÊN

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

• *Phép thử* được hiểu là sự thực hiện một số điều kiện. Mỗi phép thử có gắn với một số kết quả có thể xảy ra. Ta kí hiệu các biến cố ngẫu nhiên có liên quan đến các phép thử bởi các chữ cái in hoa A, B, C, ... Với mỗi biến cố có liên quan tới một phép thử, ta phải khẳng định được rằng: Khi một kết quả nào đó của phép thử được thực hiện thì nó xảy ra hay không xảy ra.

• Ta gọi A, B là *đồng nhất* và viết A = B, nếu với mỗi kết quả của phép thử chúng cùng xảy ra hoặc cùng không xảy ra.

• Sự không xuất hiện của A được coi là sự xuất hiện của "*đối A*", kí hiệu A^c, hay $\overline{A}$.

• Sự xuất hiện đồng thời của A, B được coi là sự xuất hiện của *A giao B*, kí hiệu $A \cap B$, hay AB.

• Sự không thể xuất hiện được coi là một biến cố, gọi là biến cố *không thể có*, kí hiệu là ϕ, hay V.

• A, B được gọi là *xung khắc* nhau nếu $AB = \phi$.

• Sự xuất hiện của ít nhất một trong 2 biến cố A, B được coi là sự xuất hiện của *A hợp B*, kí hiệu $A \cup B$. Khi $AB = \phi$ ta viết $A + B$ thay cho $A \cup B$.

• Sự chắc chắn xuất hiện được coi là một biến cố, gọi là *biến cố chắc chắn*, kí hiệu Ω, hay U.

• Nếu sự xuất hiện của A luôn kéo theo sự xuất hiện của B thì ta nói *A kéo theo B* và kí hiệu $A \subset B$.

Rõ ràng $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ và $B \subset A$.

Một số tính chất:

a) $$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c$$

$$\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c.$$

b) $$A(B \cup C) = AB \cup AC$$

$$A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C).$$

• Họ các biến cố ngẫu nhiên $A_1, A_2, ..., A_n$ được gọi là *họ đầy đủ* nếu chúng từng đôi xung khắc và $\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega$.

• Định nghĩa: $A \backslash B = AB^c$.

• Một biến cố ngẫu nhiên được gọi là *phức hợp* nếu nó có thể biểu diễn được dưới dạng hợp của hai biến cố không đồng nhất với nó. Một biến cố không là phức hợp được gọi là biến cố *sơ cấp*. Vậy một biến cố phức hợp có thể xuất hiện theo nhiều cách khác nhau. Biến cố sơ cấp chỉ xuất hiện theo một cách duy nhất. Các biến cố sơ cấp từng đôi xung khắc. Tập hợp mọi biến cố sơ cấp của một phép thử được gọi là *không gian các biến cố sơ cấp*. Ta cũng kí hiệu nó là Ω.

• Khi không gian biến cố sơ cấp gồm hữu hạn phần tử thì mỗi biến cố ngẫu nhiên A được biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng tổng của một số (hữu hạn) các biến cố sơ cấp *thích hợp* với nó. Các biến cố sơ cấp thường được kí hiệu bởi chữ e, hay ω. Số biến cố sơ cấp thích hợp với A được kí hiệu là n(A).

Một số kết quả của giải tích tổ hợp:

• Cho 2 dãy hữu hạn các phần tử $a_1, a_2, \dots, a_n$ và $b_1, b_2, \dots, b_m$. Số cặp (a_j, b_k) khác nhau từ hai dãy trên bằng n × m. Mở rộng, nếu xét k dãy với số phần tử ở các dãy tương ứng là $n_1, n_2, \dots, n_k$ thì số nhóm $(a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{kj_k})$ khác nhau thành lập từ k dãy đó bằng $\prod_{i=1}^{k} n_i$.

• Số các hoán vị của dãy n phần tử bằng n!

• Cho tập hợp gồm n phần tử. Mỗi tập con k phần tử $(1 \le k \le n)$ được gọi là một *tổ hợp chập k* của n phần tử. Số tổ hợp chập k của n phần tử bằng $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

• Mỗi nhóm k phần tử có thể trùng nhau, không phân biệt thứ tự của tập n phần tử được gọi là *tổ hợp lặp* chập k của n. Số tổ hợp lặp chập k của n kí hiệu $\tilde{C}_n^k$, khi đó, $\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \dfrac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$.

• Mỗi bộ k phần tử có thứ tự, rút từ tập n phần tử được gọi là một *chỉnh hợp* chập k của n.

Số chỉnh hợp chập k của n bằng $A_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)$.

• Mỗi nhóm k phần tử có thứ tự, có thể trùng nhau rút từ tập toàn thể gồm n phần tử được gọi là một *chỉnh hợp lặp* chập k của n. Số chỉnh hợp lặp chập k của n bằng $\tilde{A}_n^k = n^k$.

B. VÍ DỤ

1 Xét phép thử gieo một xúc xắc 2 lần. Hãy mô tả không gian biến cố sơ cấp của phép thử này. Tìm số n(A), n(B) với:

a A: "Tổng số nốt xuất hiện chia hết cho 3".

b) B: "Trị tuyệt đối của hiệu số nốt là chẵn".

GIẢI

Nếu ta kí hiệu (i, j) chỉ rằng xúc xắc thứ nhất xuất hiện i nốt, xúc xắc thứ hai xuất hiện j nốt thì mỗi biến cố sơ cấp của phép thử là một cặp (i, j) với $i, j = \overline{1,6}$. Tức là các chỉnh hợp lặp chập 2 của 6. Vậy $\Omega = \{(i,j): i,j = \overline{1,6}\}$.

a) $A = \{(i,j) \in \Omega: i+j \,\vdots\, 3\}$

$= \{(1,2), (2,1), (1,5), (5,1), (2,4), (4,2), (3,3), (3,6), (6,3), (4,5), (5,4), (6,6)\}$

Vậy n(A) = 12.

b) $B = \{(i,j), i,j = \overline{1,6} : |i - j| \,\vdots\, 2\}$

$= \{(1,3), (1,5), (3,1), (5,1), (2,4), (2,6), (4,2), (6,2), (3,5), (5,3), (4,6), (6,4), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$

Vậy: n(B) = 18.

2. Bắn ba viên đạn vào một bia. Gọi A_i: "viên đạn thứ i trúng bia" (i = 1, 2, 3). Xét các biến cố ngẫu nhiên:

A: "Có đúng một viên đạn trúng bia"

B: "Có ít nhất hai viên đạn trúng bia"

C: "Cả ba viên đều không trúng bia"

D: "Hai viên sau trúng bia".

Hãy biểu diễn A, B, C, D, $A \cup B$, $B \backslash C$ qua các A_i, A_i^c (i = 1,2,3).

GIẢI

$A = A_1A_2^cA_3^c + A_1^cA_2A_3^c + A_1^cA_2^cA_3$

$B = A_1A_2A_3^c + A_1A_2^cA_3 + A_1^cA_2A_3 + A_1A_2A_3.$

$C = A_1^cA_2^cA_3^c$;

$D = A_1A_2A_3 + A_1^cA_2A_3 = A_2A_3.$

$A \cup B = A_1 \cup A_2 \cup A_3$

$B \backslash C = B$ (vì $B \cap C = \phi$).